Niedersächsisches Kultusministerium
Referat 33 / Logistikstelle für zentrale Arbeiten

November 2016

Aufgaben für das Fach Mathematik

Eingesetzte Abituraufgaben aus dem länderübergreifenden Abituraufgabenpool

2016

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik stammen die Aufgaben aus zwei Aufgabenpools, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Die vorliegenden Aufgaben sollen die Möglichkeiten der Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis über die veröffentlichten Musteraufgaben hinaus erweitern.

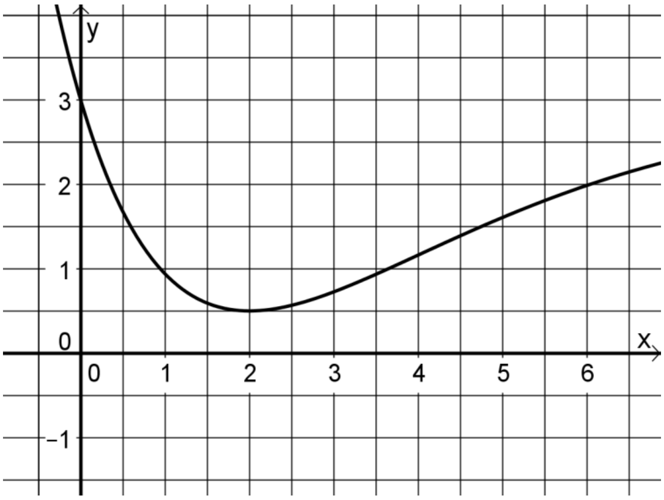
Dabei gilt für Niedersachsen die Einschränkung, dass bis zur Abiturprüfung 2016 die Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen als verbindlicher Inhalt auch Gegenstand der Abiturprüfung war und entsprechende Aufgaben für den Pflichtteil ausgewählt werden konnten. <u>Ab der Abiturprüfung 2017 werden Inhalte aus der vektoriellen Analytischen Geometrie gemäß der Alternative A2 der Bildungsstandards Gegenstand der Abiturprüfung sein (vgl. Hinweise zur Abiturprüfung Mathematik 2017).</u> Damit können auch Aufgaben mit solchen Inhalten aus dem Aufgabenpool für den Pflichtteil ausgewählt werden.

1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)dx$. (2 BE)

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3)=0$.

b) Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x=2$ an. (1 BE)

c) Zeigen Sie, dass $F(b)=\int_3^b f(x)dx$ mit $b\in\mathbb{R}$ gilt. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1		
a)	Durch Abschätzen der Anzahl der Quadrate in der Grafik ergibt sich: $\int_3^5 f(x)dx \approx 9\cdot 0{,}25 \approx 2{,}3$.	2
b)	$F'(2)\approx 0{,}5$	1
c)	Aufgrund $F(3)=0$ ergibt sich: $\int_3^b f(x)dx = F(b)-F(3)=F(b)$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A1_2

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an. (1 BE)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt. (4 BE)

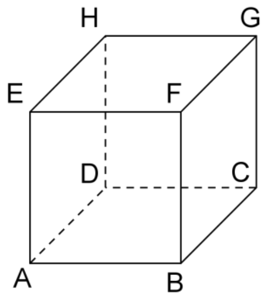
	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_2		
a)	$x = 0$; $x = a$	1
b)	$\int_0^a f_a(x)\,dx = \int_0^a (-a \cdot x^2 + a^2 \cdot x)\,dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x^2\right]_0^a = \frac{1}{6} \cdot a^4$ $\frac{1}{6} \cdot a^4 = \frac{8}{3}$; $a^4 = 16$; $a = 2$, da $a > 0$	4
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

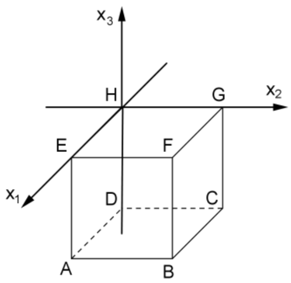
G1_1

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an. (2 BE)

b) Der Punkt P liegt auf der Kante FB des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1 a)	 Die Skalierung ist durch die eingezeichneten Punkte gegeben und muss nicht gesondert erfolgen. $A(2\|0\|-2)$	2
b)	Mit $P(2\|2\|x_3)$ folgt $\left\|\overrightarrow{HP}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+x_3^2} = 3$. Aus $x_3^2 = 1$ folgt $x_3 = -1$, da $-2 \le x_3 \le 0$. $P(2\|2\|-1)$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G1_2

Gegeben sind die Ebene $E: 2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft. (2 BE)

b) Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F.
Ermitteln Sie eine Gleichung von F. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G1_1 a)	$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ}$ und der Normalenvektor $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ der Ebene E sind kollinear.	2
b)	Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$, so gilt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$. Da die Ebene F nach der Angabe in a) parallel zu E ist, gibt es einen Wert von d mit $F: 2x + y + 2z = d$. Da M in der Ebene F liegt, folgt aus $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = d$ für d der Wert 15. Damit ergibt sich $F: 2x + y + 2z = 15$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.

a) Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix

$N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ die Bedingungen I und II gelten:

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.
II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d. h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich eins.
(3 BE)

b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ sind Fixvektoren einer Matrix L.
Zeigen Sie, dass auch der Vektor $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ ein Fixvektor von L ist. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_1 a)	Bedingung I: $N \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \cdot a + 50 \\ 100 \cdot b + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ Aus $100 \cdot a + 50 = 70$ und $100 \cdot b + 20 = 30$ folgt $a = 0{,}2$ und $b = 0{,}1$. Bedingung II: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ ist eine stochastische Matrix, da alle Elemente nichtnegative reelle Zahlen sind und alle Spaltensummen 1 ergeben.	3
b)	Einsetzen von $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ in den Term $L \cdot \vec{z}$ liefert $L \cdot \vec{z} = L \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = L \cdot \vec{x} + L \cdot \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA1_2

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B.

In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

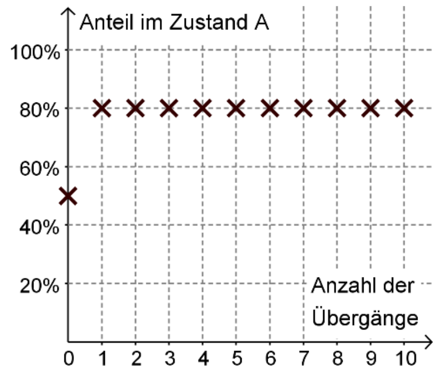
a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst. (2 BE)

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben.

Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die nebenstehende Abbildung stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.



Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann. (3 BE)

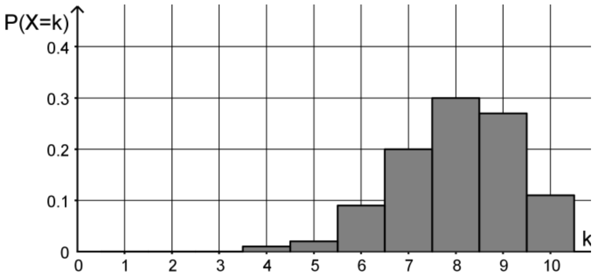
	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_2 a)	$M \cdot M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}28 \end{pmatrix}$	2
b)	N liefert im ersten Übergang $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ ist Fixvektor der Matrix N. Begründung z.B.: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Damit liefert N in jedem weiteren Übergang die dargestellten Anteile im Zustand A.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S1_1

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.
Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben.
Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ angenommen.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_1		
a)	Für $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$ ergibt sich z. B. $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$.	2
b)	$P(X=0) = 0{,}2^{10}$ $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10^{10}} = 0{,}0000001024$ und $\frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$ Es gilt also: $0{,}2^{10} < \frac{1}{1\,000\,000}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S1_2

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird festgelegt: { ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW }.

a) Begründen Sie, dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist. (2 BE)

b) Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu.
Berechnen Sie den Erwartungswert von X. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S1_2 a)	$P(ZZ)=\frac{1}{4}$; $P(ZWZ)=\frac{1}{8}$ Die Ergebnisse des Zufallsexperiments weisen also nicht alle die gleiche Wahrscheinlichkeit auf, daher handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment.	2
b)	$P(X=2)=P(ZZ)+P(WW)=\frac{1}{2}$ Damit gilt $P(X=3)=1-P(X=2)=\frac{1}{2}$ und es folgt $E(X)=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3=2{,}5$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $\left(-1 \middle| f_a(-1)\right)$ wird mit t_a bezeichnet.

a) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann. (3 BE)

b) Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A2_1		
a)	Die Gleichung der Tangente t_a lautet $y = t_a(x) = m \cdot x + b$. $m = f_a'(-1) = a \cdot e^{a-1}$ Für $x = -1$ gilt: $t_a(-1) = f_a(-1) = a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + b = a \cdot e^{a-1}$. Damit ist $b = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ und $t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	3
b)	Mit $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ und $g = 2$ sowie $h = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ folgt $A = 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2 Analytische Geometrie

G2_1

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. (2 BE)

b) Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:
I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.
Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G2_1 a)	Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt $C(2\|3\|0)$.	2
b)	Da $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3$ gilt, hat jede zu g senkrechte Gerade durch B von A den Abstand 3. Aus $\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ erhält man z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einen möglichen Richtungsvektor. Gleichung einer möglichen Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.3 Stochastik

S2_1

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

a) Berechnen Sie für $p = 0,4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass für jeden Wert von p gilt: $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S2_1 a)	$P(X \leq 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - 0,4^2 = 1 - 0,16 = 0,84$	2
b)	$P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2)$ $= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 0) + P(X = 1)$ $= 2 \cdot (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 2 \cdot 1 = 2$	3

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.